Correction du Pb 5 -

1. Préliminaires

1.1 $\begin{cases} \vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} \\ \vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2\vec{OA}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + \dfrac{d^2\vec{GA}}{dt^2} \\ \dfrac{d^2\vec{OB}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + \dfrac{d^2}{dt^2}\vec{GB} \end{cases}$

donc :

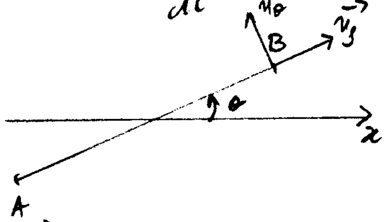
$$m_A \frac{d^2\vec{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d^2}{dt^2}\vec{OB} + m_G \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = m\left[\frac{1}{6}\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + \frac{1}{6}\frac{d^2\vec{GA}}{dt^2} + \frac{1}{6}\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + \frac{1}{6}\frac{d^2\vec{GB}}{dt^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2}\right]$$

$$= m\left[\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + \frac{1}{6}\frac{d^2}{dt^2}(\vec{GA}+\vec{GB})\right]$$

or par définition : $\vec{GA} + \vec{GB} = 0$ donc ;

$$m_A \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} + m_B \frac{d^2\vec{OB}}{dt^2} + m_G \frac{d^2}{dt^2}\vec{OG} = m\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2}$$

1.2 $\vec{v}_A = \dfrac{d\vec{OA}}{dt} = \dfrac{d\vec{OG}}{dt} + \dfrac{d\vec{GA}}{dt}$



et $\vec{v}_B = \dfrac{d\vec{OB}}{dt} = \dfrac{d\vec{OG}}{dt} + \dfrac{d\vec{GB}}{dt}$

or $\vec{GB} = l\vec{u}_g \Rightarrow \dfrac{d\vec{GB}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

et

$\vec{GA} = -\vec{GB} \Rightarrow \dfrac{d\vec{GA}}{dt} = -l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_G - l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{v}_B = \vec{v}_G + l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{cases}$

1.3 $\vec{L}_G = \vec{0}$ car le moment cinétique est calculé par rapport au point G.

$\vec{L}_A = \vec{GA} \wedge m_A \vec{v}_A$ et $\vec{L}_B = \vec{GB} \wedge m_B \vec{v}_B$

$\vec{L} = \vec{L}_A + \vec{L}_B + \vec{L}_G = \vec{L}_A + \vec{L}_B = \vec{GA} \wedge m_A\vec{v}_A + \vec{GB} \wedge m_B \vec{v}_B$

or $m_A = m_B = \frac{1}{6}m$ et $\vec{GB} = -\vec{GA}$

$\Rightarrow \vec{L} = \frac{1}{6}m\ \vec{GB} \wedge (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$ or $\vec{GB} = l\vec{u}_g$ et $\vec{v}_B - \vec{v}_A = 2l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \vec{L} = \frac{1}{6}m\ (l\vec{u}_g) \wedge (2l\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\ \vec{k}$

donc le moment d'inertie $I = \dfrac{ml^2}{3}$

1.4. l'énergie cinétique.

$$E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_G v_G^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{6} (\vec{v_G} - l\dot\theta \vec{u_\theta})^2 + \frac{1}{6} (\vec{v_G} + l\dot\theta \vec{u_\theta}) + \frac{2}{3} v_G^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[v_G^2 + \frac{1}{3} (l\dot\theta)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \quad E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \dot\theta^2$$

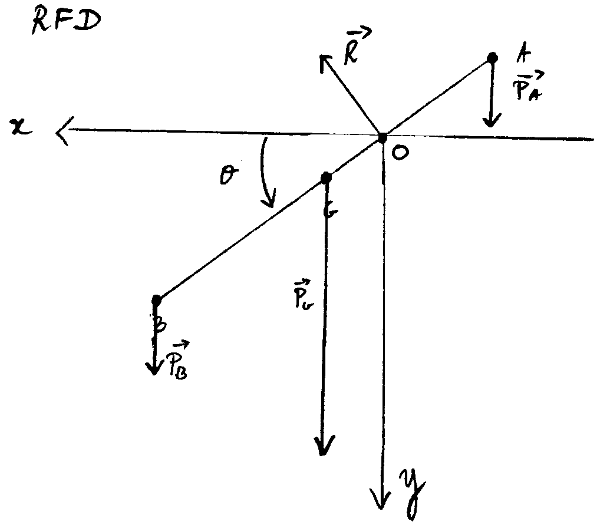
On a donc séparer l'énergie cinétique en deux partie :

$\frac{1}{2} m v_G^2$: énergie cinétique de translation.

$\frac{1}{2} I \dot\theta^2$ énergie cinétique de rotation.

2. Première phase de la chute.

2.1 RFD



2.1.1 Bilan des forces : $\vec{P_A}, \vec{P_B}, \vec{P_G}$ le poids des 3 masses

$\vec{R}$ la réaction de la table.

2.1.2 $\vec{P_A} + \vec{P_B} + \vec{P_G} = m\vec{g}\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right] = m\vec{g} = mg\,\vec{u_y}$

RFD : $m_A \frac{d^2\vec{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d^2\vec{OB}}{dt^2} + m_G \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \vec{R} + \vec{P_A} + \vec{P_B} + \vec{P_G}$

d'après 1.1 on a :

$$m \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{R}$$

2.1.3 on écrit $\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2}$ dans la base $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$:

$$\vec{OG} = \rho\,\vec{u_\rho} \Rightarrow \frac{d\vec{OG}}{dt} = \dot\rho\,\vec{u_\rho} + \rho\dot\theta\,\vec{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\,\vec{u_\rho} + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\,\vec{u_\theta}$$

on exprime les forces dans la base $(\vec{u_\rho}, \vec{u_\theta})$:

$\vec{g}.\vec{u_\rho} = g \sin\theta \qquad \vec{R}.\vec{u_\rho} = 0$

$\vec{g}.\vec{u_\theta} = g \cos\theta \qquad \vec{R}.\vec{u_\theta} = -R$ où $R \geqslant 0$

La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur les vecteurs $\vec{u_\rho}$ et $\vec{u_\theta}$ donne les deux équations (E1) et (E2) :

$$\begin{cases} \text{Sur } \vec{u_\rho} : \ \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = g \sin\theta & \text{(E1)} \\ \text{Sur } \vec{u_\theta} : \ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = g\cos\theta - \dfrac{R}{m} & \text{(E2)} \end{cases}$$

2.2. Moment Cinétique

2.2.1. Calculons le moment de chacune des forces par rapport au point G :

* le moment de $\vec{P_A}$ par rapport à G :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\vec{P_A})/G = \vec{GA} \wedge \vec{P_A}$$

* le moment de $\vec{P_B}$ / G :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P_B})/G = \vec{GB} \wedge \vec{P_A}$$

* le moment de $\vec{P_G}$ / G :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P_G})/G = \vec{0}$$

* le moment de $\vec{R}$ / G :

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{R})/G = \vec{GO} \wedge \vec{R}$$

le moment total des forces :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/G} = \vec{\mathcal{M}}(\vec{P_A})/G + \vec{\mathcal{M}}(\vec{P_B})/G + \vec{\mathcal{M}}(\vec{P_G})/G + \vec{\mathcal{M}}(\vec{R})/G$$
$$= \vec{GA} \wedge \vec{P_A} + \vec{GB} \wedge \vec{P_B} + \vec{GO} \wedge \vec{R}$$

or $\vec{GA} = -\vec{GB}$ et $\vec{P_A} = \vec{P_B}$ donc : $\vec{GA} \wedge \vec{P_A} + \vec{GB} \wedge \vec{P_B} = \vec{0}$

$$\vec{\mathcal{M}}_{/G} = \vec{GO} \wedge \vec{R}$$

Finalement seule la réaction exerce un couple sur la tartine

2.2.2. le moment cinétique vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{/G} = \vec{GO} \wedge \vec{R}$$

or $\vec{L} = I\dot{\theta}\,\vec{t} \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = I\ddot{\theta}\,\vec{t} = \dfrac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\,\vec{t}$

et $\vec{GO} \wedge \vec{R} = (-\rho\vec{u_\rho}) \wedge (-R\vec{u_\theta}) = \rho R\vec{t}$

donc : $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{/G} \Longrightarrow \dfrac{ml^2\ddot{\theta}}{3} = \rho R \quad (E_3)$

2.2.3 l'équation (E3) implique que $\ddot{\theta} \geqslant 0$

donc la fonction $\dot{\theta}(t)$ est une fonction croissante du temps.

Comme $\theta(t)$ est aussi une fonction croissante du temps alors $\dot{\theta}$ est une fonction croissante de la variable θ.

2.2.4 l'équation (E2) peut s'écrire :

$$g \cos\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} + \frac{R}{m}$$

or $2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} + \frac{R}{m} \geqslant 0$ en effet $\ddot{\theta} \geqslant 0$ $\rho \geqslant 0$

$\dot{\rho} \geqslant 0$ car ρ ne peut qu'augmenter i.e. la tartine tombe.

et $\dot{\theta} \geqslant 0$ car θ ne peut qu'augmenter. idem.

donc $\cos\theta \geqslant 0$ comme initialement $\theta = 0$ et que θ augmente avec le temps : $\Rightarrow$ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

2.3 <u>Energie</u>

2.3.1. les forces autres que $\vec{R}$ sont les poids $\vec{P_A}$, $\vec{P_B}$ et $\vec{P_G}$.

le poids est une force conservative, elle derive donc d'une énergie potentielle.

2.3.2 $\vec{P_A} = m_A \vec{g} = m_A g \vec{j} \Rightarrow \mathcal{U}_A = -m_A g y_A + c$ (mais $c = 0$ car $\mathcal{U}(y=0) = 0$)

de même on a : $\mathcal{U}_B = -m_B g y_B$

$$\mathcal{U}_G = -m_G g y_G$$

où y_A, y_B et y_G sont les ordonnées respectives des points A, B et G

2.3.3 : l'énergie potentielle totale :

$$\mathcal{U}(y) = \mathcal{U}_A(y_A) + \mathcal{U}_B(y_B) + \mathcal{U}_G(y_G) = -g(m_A y_A + m_B y_B + m_G y_G)$$

or $y_A = \vec{OA}\cdot\vec{j} = (\vec{OG} + \vec{GA})\cdot\vec{j} = y_G + \vec{GA}\cdot\vec{j}$

$$y_B = \vec{OB}\cdot\vec{j} = (\vec{OG} + \vec{GB})\cdot\vec{j} = y_G + \vec{GB}\cdot\vec{j}$$

donc : $\mathcal{U}(y) = -mg\left[\frac{1}{6} y_G + \frac{1}{6}\vec{GA}\cdot\vec{j} + \frac{1}{6} y_G + \frac{1}{6}\vec{GB}\cdot\vec{j} + \frac{2}{3} y_G\right]$

$$= -mg\left[y_G + \frac{1}{6}(\vec{GB} + \vec{GA})\cdot\vec{j}\right] = -mg y_G \quad \text{car } \vec{GB} + \vec{GA} = 0$$

finalement : $\mathcal{U}(y) = -mg y_G = -mg\rho\sin\theta$

l'énergie potentielle totale est la même que si toute la masse m était en G.

2.3.4 - Comme les forces qui travaille sont conservative, l'énergie mécanique totale de la tige se conserve.

* l'énergie mécanique initiale :

au départ la tartine est horizontale donc $y_G = 0 \Rightarrow \mathcal{U} = 0$
et sa vitesse initiale est nulle :

$$E(t=0) = 0$$

* l'énergie mécanique à un instant ultérieur, t :

$$E = E_c + \mathcal{U}$$

or : $E_c = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_G v_G^2 = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$ d'après (2)

donc $E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - m g \rho \sin\theta$

or $\vec{v_G} = \dot{\rho}\,\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \Rightarrow v_G^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2$

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2\right) + \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - m g \rho \sin\theta$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 \left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3}\right) - m g \rho \sin\theta$$

* la conservation de l'énergie :

$$E = 0 \Leftrightarrow \dot{\rho}^2 + \dot{\theta}^2\left(\rho^2 + \frac{\ell^2}{3}\right) = 2 g \rho \sin\theta \quad (E4)$$

2.4 Condition de décrochage

2.4.1 : A l'instant où la liaison entre la tige et la table est rompue on a : $\vec{R} = \vec{0}$. ie la réaction s'annule.

d'après l'équation (E3) on a : $\ddot{\theta} = 0$

2.4.2 : Comme $\ddot{\theta} = 0$ et $R = 0$ on obtient les relations suivantes :

$E1'$: $\ddot{\rho}_c + \rho_c \dot{\theta}_c^2 = g \sin\theta_c$

$E2'$: $2\dot{\rho}_c \dot{\theta}_c = g \cos\theta_c$

$E3'$: $\dot{\rho}_c^2 + \dot{\theta}_c^2 \left(\rho_c^2 + \frac{\ell^2}{3}\right) = 2 g \rho_c \sin\theta_c$

⚠ ces relations ne sont pas des équations différentielles mais des relations entre les nombres $\ddot{\rho}_c, \dot{\rho}_c, \rho_c, \dot{\theta}_c$ et θ_c

2.4.3

$E'2 \Leftrightarrow \quad \rho_c = \dfrac{g\cos\theta_c}{2\dot\theta_c}$ en introduisant dans E'_4 on obtient :

$$\frac{g^2\cos^2\theta_c}{4\dot\theta_c^2} + \dot\theta_c^2\left(\rho_c^2 + \frac{\ell^2}{3}\right) = 2g\rho_c\sin\theta_c$$

en multipliant par $\dfrac{3\dot\theta_c^2}{\ell^2}$ cette relation et en notant $\eta = \dfrac{\rho_c}{\ell}$ et $\Omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$:

$$\dot\theta_c^4(3\eta^2+1) - 6\Omega^2\eta\sin\theta_c\,\dot\theta_c^2 + \frac{3}{4}\Omega^4\cos^2\theta_c = 0$$

dont on vérifie aisément l'homogénéité.

2.4.4 Nous avons obtenu une équation du 2e degré en $\dot\theta_c^2$

Calculons son discriminant réduit, Δ :

$$\Delta = 9\Omega^4\eta^2\sin^2\theta_c - \frac{3}{4}\Omega^4(3\eta^2+1)\cos^2\theta_c$$
$$= 3\Omega^4\left[3\eta^2\sin^2\theta_c - (3\eta^2+1)\frac{\cos^2\theta_c}{4}\right]$$

en utilisant $\cos^2\theta_c = 1-\sin^2\theta_c$ on a :

$$\Delta = \frac{3}{4}\Omega^4\left[(15\eta^2+1)\sin^2\theta_c - (3\eta^2+1)\right]$$

Pour que l'équation du 2e degré ait des solutions réelles il faut que

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2\theta_c \geq \frac{3\eta^2+1}{15\eta^2+1}$$

la fonction $f(\eta) = \dfrac{3\eta^2+1}{15\eta^2+1}$ étant strictement décroissante pour $0 \leq \eta \leq 1$

le minimum de $f(\eta)$ sur l'intervalle $[0,1]$ s'obtient pour $\eta = 1$:

or $f(1) = 1/4 \Rightarrow \quad \sin^2\theta_c \geq 1/4 \Rightarrow \quad \sin\theta_c \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_c \geq \pi/6$

2.4.5 - on obtient donc : $\pi/6 \leq \theta_c \leq \pi/2$

2.4.6 - les solutions de l'équation du second degré en $\dot\theta^2$;

$$\dot\theta^2 = \frac{1}{(3\eta^2+1)}\left\{3\Omega^2\eta x \pm \Omega^2\left[\frac{3}{4}(15\eta^2+1)x^2 - \frac{3}{4}(3\eta^2+1)\right]\right\}$$

où $x = \sin\theta_c$

qui est bien de la forme :

$$\dot\theta^2 = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left\{ax \pm (bx^2-c)\right\}$$

avec : $a = 3\eta$; $b = \frac{3}{4}(15\eta^2+1)$; $c = \frac{3}{4}(3\eta^2+1)$

2.4.7: Soit $f_+(x) = ax + \sqrt{bx^2 - c}$ et $f_-(x) = ax - \sqrt{bx^2 - c}$

Calculons les dérivées de f_+ et f_- :

$$f_+'(x) = a + \frac{bx}{\sqrt{bx^2-c}} > 0$$ donc $f_+(x)$ est croissante.

$$f_-'(x) = a - \frac{bx}{\sqrt{bx^2-c}}$$

étudions le signe de : $\sqrt{bx^2-c} \cdot f_-'(x) = \sqrt{bx^2-c} \cdot a - bx$

or $\sqrt{bx^2-c} < \sqrt{b}x$ car $c>0$ donc

$\sqrt{bx^2-c}\, f_-'(x) < a\sqrt{b}x - bx = \sqrt{b}x(a-\sqrt{b})$

or $a - \sqrt{b} = 3\eta - \sqrt{\frac{3}{4}(15\eta^2+1)}$

or $15\eta^2+1 > 15\eta^2$ donc $a-\sqrt{b} < 3\eta - \sqrt{\frac{3}{4}15\eta^2} = 3\eta\left[2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right] < 0$

donc finalement $f_-(x)$ est décroissante.

On avait vu que $\dot\theta$ était une fonction croissante de θ

donc $\dot\theta_c$ doit être une fonction croissante de θ_c. Comme $\dot\theta_c$ est positif

$\dot\theta_c^2$ doit aussi être croissante. Donc seul la solution :

$$\dot\theta_c^2 = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left[ax + \sqrt{bx^2-c}\right]$$ est physiquement acceptable.

et $\sqrt{\frac{c}{b}} \leqslant x \leqslant 1$

2.4.8 la plus petite valeur de $\dot\theta_c^2$ s'obtient pour $x = \sqrt{\frac{c}{b}}$

$$\min(\dot\theta_c^2) = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left[\sqrt{\frac{c}{b}} \cdot a\right] = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2} \cdot 3\eta\sqrt{\frac{3\eta^2+1}{15\eta^2+1}} = \frac{\Omega^2 3\eta}{\sqrt{(1+3\eta^2)(15\eta^2+1)}}$$

La plus grande valeur de $\dot\theta_c^2$ s'obtient pour $x = 1$

$$\max(\dot\theta_c^2) = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left[a + \sqrt{b-c}\right] = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left\{3\eta + \left[\frac{3}{4}\left((15\eta^2+1) - (3\eta^2+1)\right)\right]^{1/2}\right\}$$

$$= \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\, 6\eta$$

on a donc bien

$$\Omega\left[\frac{3\eta}{(1+15\eta^2)^{1/2}(1+3\eta^2)^{1/2}}\right]^{1/2} \leqslant \dot{\theta}_c \leqslant \Omega\left[\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\right]^{1/2}$$

en considérant $\eta \ll 1$ on obtient :

$$\Omega\sqrt{3\eta} \leqslant \dot{\theta}_c \leqslant \Omega\sqrt{6\eta}$$

3. Seconde phase de la chute

3.1. La tige est en chute libre. les point A, B, G ne sont soumis qu'à leur poids. $\vec{R} = \vec{0}$.

On avait vu que $\vec{\mathcal{M}}(\vec{P_A})/G + \vec{\mathcal{M}}(\vec{P_B})/G + \vec{\mathcal{M}}(\vec{P_G})/G = \vec{0}$

c.à.d la somme des moments des forces appliquées est nulle.

donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow I\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow I\dot{\theta} = cte$

donc $\dot{\theta} = cte$. la vitesse angulaire est constante et est donc égale à $\dot{\theta}_c \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}_c$.

3.2 si on néglige la vitesse $\|\vec{v}_G\|$ à l'instant où la tige décolle de la table et si on suppose qu'à ce même instant l'ordonnée du point G est nulle, alors le temps de chute est juste le temps que mettrait une masse m à tomber d'une hauteur h, sachant que sa vitesse initiale est nulle.

la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}mv_G^2 = mgh \Rightarrow v_G = \sqrt{2gh}$$

et la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = m\vec{g} \Rightarrow v_g = gT \quad \text{où } T \text{ est le temps de chute.}$$

donc $v_g = gT = \sqrt{2gh} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

3.3. l'angle dont la tige a tourné pendant la seconde phase de la chute est :

$$\alpha_2 = \dot{\theta} T = \dot{\theta}_c T = \dot{\theta}_c \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

l'angle dont la tartine a tourné pendant la 1e phase de la chute est $\alpha_1 = \theta_c$

Donc l'angle total de rotation est :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \theta_c + \dot{\theta}_c \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Comme $\pi/6 \leqslant \theta_c \leqslant \pi/2$

et $\sqrt{3\eta}\,\Omega \leqslant \dot{\theta}_c \leqslant \sqrt{6\eta}\,\Omega$ on obtient :

$$\sqrt{3\eta}\,\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} + \pi/6 \leqslant \alpha \leqslant \sqrt{6\eta}\,\Omega \sqrt{\frac{2h}{g}} + \pi/2$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi/6 + \sqrt{6\eta\frac{h}{\ell}} \leqslant \alpha \leqslant \pi/2 + \sqrt{2}\sqrt{6\eta\frac{h}{\ell}}$$

3.4. $\eta = 5\%$ $h = 1m$ $\ell = 15cm$

$$\sqrt{6\eta\frac{h}{\ell}} = \sqrt{\frac{6 \times 5\,10^{-2} \times 1}{15\,10^{-2}}} = \sqrt{2}$$

$$\pi/6 + \sqrt{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi/2 + 2$$

$$111^\circ \leqslant \alpha \leqslant 204^\circ$$

la tartine tombe du côté beurré, car elle a tourné d'un angle supérieur à $\pi/2$ et inférieur à $3\pi/2$.