# Problème de mécanique
# (Moment cinétique)
# Étude de la chute d'une tartine

*(Auteur : Arne Keller)*

Le matin de bonne heure, le café est en train de se faire et vous beurrez votre première tartine que vous posez sur le bord de la table. Au moment de vous servir le café, un petit coup de coude et catastrophe : la tartine tombe, bien évidemment elle tombe du coté beurre, la journée s'annonce mauvaise. Cette propension qu'ont les tartines à tomber du coté beurré est énigmatique. Certains l'ont attribué à une force maléfique ... Vous faites des études scientifiques, vous refusez donc d'accepter ce genre d'argumentation.

Dans ce problème nous allons donc étudier la chute de la tartine, et tenter d'obtenir une explication mécanique à ce dangereux phénomène. Supposons qu'au départ, la tartine soit maintenue horizontale, en surplomb sur le bord de la table. Une fois lâchée, la chute de la tartine se décompose en deux phases. Au cours de la première phase, la tartine glisse sur le rebord de la table : elle tombe tout en pivotant, autour de son centre de gravité, mais elle reste toujours en contact avec le bord de la table. A un certain moment, le contact avec la table est rompu, la seconde phase de la chute commence. Au cours de cette seconde phase, la tartine est en chute libre. Nous allons donc traiter ces deux phases séparément, mais avant tout, détaillons la façon dont nous allons modéliser la tartine.

## 1 Préliminaires-Modélisation de la tartine

On pourrait considérer que la tartine est un parallèlépipède rectangle, mais comme pour le moment vous ne savez traiter que les mouvements de points matériels dans l'espace et non pas le mouvement d'un solide, on va modéliser la tartine de la façon suivante : La tartine sera modélisée par une tige rigide $AB$ de longueur $2l$ à laquelle sont attachées trois masses ponctuelles, deux masses égales sont situées respectivement aux extremités $A$ et $B$ de la tige, $m_A = m_B = \frac{m}{6}$ et une masse $m_G = \frac{2}{3}m$ est située au centre $G$ de la tige. On négligera la masse de la tige.

Supposons que la tige $AB$ soit animée d'un mouvement quelconque dans un plan $Oxy$ muni des vecteurs unitaires de base $\vec{i}, \vec{j}$. Notons $\vec{u}_\rho$ le vecteur unitaire ayant même direction et sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire défini par $\vec{u}_\theta = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$, $\theta$ étant l'angle que fait la tige avec l'axe $Ox$.

1. Montrer que l'expression suivante :

$$m_A \frac{d^2\,\overrightarrow{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d^2\,\overrightarrow{OB}}{dt^2} + m_G \frac{d^2\,\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

peut s'exprimer très simplement en fonction de l'accélération du point $G$ et de la masse totale de la tige.

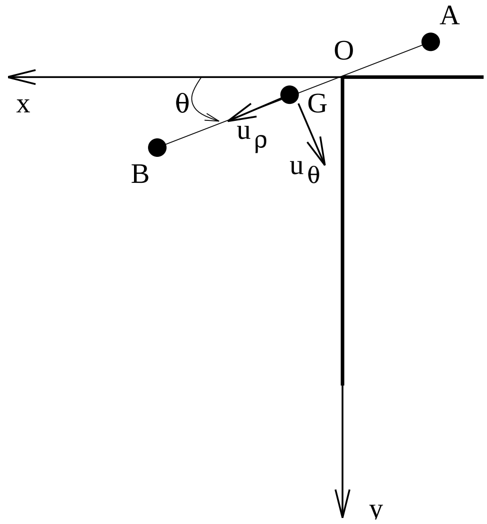


Figure 1:

2. Donner une expression des vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ des points $A$ et $B$ en fonction de la vitesse $\vec{v}_G$ du point $G$, de $l$, $\dot{\theta}$ et de $\vec{u}_\theta$.

3. Soit $\vec{L}_A$, $\vec{L}_B$, $\vec{L}_G$, les moments cinétiques respectifs par rapport au point $G$ des masses $m_A$, $m_B$ et $m_G$. Quelle est la valeur de $\vec{L}_G$? Montrer que le moment cinétique total de la tige peut s'écrire de la façon suivante :
$$\vec{L} = \vec{L}_A + \vec{L}_G + \vec{L}_B = I\dot{\theta}\vec{k} \quad (1)$$
où $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. $I$ est appellé le moment d'inertie de la tige, on donnera son expression en fonction de $m$ et $l$.

4. Calculer l'énergie cinétique totale de la tige et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :
$$E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

# 2 Première phase de la chute

On considère dans cette section, qu'au cours de sa chute, la tige reste dans le plan $Oxy$ perpendiculaire à l'arête constituant le bord de la table et qu'elle est en permanence en contact avec la table. On prendra comme origine $O$ du repère, le point de contact de la tige avec la table, l'axe $Ox$ sera pris horizontal, et l'axe $Oy$ vertical, dirigé vers le bas. La réaction $\vec{R}$, de la table sur la tige, est normale à la tige, car il n'y a pas de frottement. On notera $\rho$ la distance $OG$ et $\theta$ l'angle que fait la tige avec l'axe $Ox$. $\vec{u}_\rho$ est le vecteur unitaire ayant même direction et même sens que $\overrightarrow{OG}$ (voir figure Fig.1).

## 2.1 Relation fondamentale de la dynamique

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la tige. On fera un schéma représentant la tige avec les vecteurs forces.

2. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour la tige. En utilisant la relation obtenue à la question 1.1, on remarquera que l'on obtient une expression qui ne concerne que le mouvement du point $G$.

3. A partir de l'expression précédente déterminer deux équations différentielles faisant intervenir $\rho$, $\theta$ et leurs dérivées premières et secondes, par rapport au temps. L'équation faisant intervenir la dérivée seconde de $\rho$ sera notée $E1$ et l'équation faisant intervenir la dérivée seconde de $\theta$ sera notée $E2$.

## 2.2 Moment cinétique

1. Déterminer la somme des moments des forces par rapport au point $G$, s'exerçant sur la tige. On montrera que la seule force qui intervient dans cette expression est la réaction $\vec{R}$ de la table sur la tige .

2. Ecrire l'équation d'évolution du moment cinétique. En utilisant l'équation (1), on obtiendra une équation différentielle reliant $\ddot{\theta}$ et $\rho$, que l'on notera $E3$.

3. En déduire que $\dot{\theta}$ est une fonction croissante du temps et donc une fonction croissante de $\theta$.

4. Puis en utilisant l'équation $E2$ en déduire que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

## 2.3 Energie

1. Montrer que les forces autre que $\vec{R}$, dérivent d'une énergie potentielle.

2. La force de réaction $\vec{R}$ de la table sur la tige ne travaillant pas, calculer l'énergie potentielle de chacun des points $A$, $B$ et $G$. On prendra l'origine des énergies potentielles en $y = 0$, c'est à dire au niveau de la table.

3. Montrer que l'énergie potentielle totale de la tige s'écrit :

$$U(\rho, \theta) = -mg\rho \sin(\theta)$$

4. La tige est lachée, à partir de sa position horizontale, sans vitesse initiale. En utilisant l'équation (2), déterminer une équation différentielle reliant $\dot{\rho}^2$, $\dot{\theta}^2$, $\rho$ et $\theta$. On notera $E4$ cette équation.

## 2.4 Condition de décollage

Comme dans la plupart des problèmes physiques, on ne sait pas écrire la solution des quatres équations différentielles $E1$, $E2$, $E3$, $E4$, qui caractérisent le mouvement de la tige. Néanmoins, nous allons tenter d'extraire la maximum d'information de ces équations, pour résoudre le problème qui nous préoccupe : montrer que la tartine tombe du coté beurré. Dans cette section nous allons chercher à encadrer la valeur de $\dot{\theta}$, à l'instant où la liaison entre la tige et la table est rompue.

On notera $\theta_c$, l'angle que fait la tige avec l'axe $Ox$, à l'instant où le contact entre la tige et la table est rompu et $\dot{\theta}_c$ la valeur de $\dot{\theta}$ à cet instant. De même, on notera $\rho_c$, $\dot{\rho}_c$ et $\ddot{\rho}_c$, la valeur de $\rho$ et de ses dérivées par rapport au temps, au même instant.

1. Ecrire la condition correspondant à la rupture de la liaison entre la table et la tige. Quelle est alors la valeur de $\ddot{\theta}$ à l'instant où cette rupture se produit?

2. Que deviennent les équations $E1$, $E2$ et $E4$ à l'instant où la tartine décolle de la table. On notera $E1'$, $E2'$ et $E4'$ ces nouvelles équations.

3. En utilisant les équations $E2'$ et $E4'$, obtenir une équation ne faisant intervenir que $\dot{\theta}_c$, $\theta_c$, $\eta = \rho_c/l$ et $\Omega^2 = g/l$.

4. Montrer que $\frac{\pi}{6} \leq \theta_c$. Pour cela on étudiera la fonction :

$$f(\eta) = \frac{3\eta^2 + 1}{15\eta^2 + 1}$$

   dans l'intervalle correspondant aux valeurs physiques de $\eta$.

5. En utilisant le résultat de la question (2.2.4) on obtiendra donc un encadrement pour la valeur de $\theta_c$.

6. Montrer alors que les valeurs possibles de $\dot{\theta}_c^2$ sont données par :

$$\dot{\theta}_c^2 = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left\{ax \pm \sqrt{bx^2 - c}\right\}$$

   Où on a noté $x = \sin(\theta_c)$ et où les paramètres $a$, $b$ et $c$ ne dépendent que de $\eta$. On donnera l'expression de ces paramètres en fonction de $\eta$.

7. En utilisant le résultat de la question (2.2.3) montrer que seule la solution :

$$\dot{\theta}_c^2 = \frac{\Omega^2}{1+3\eta^2}\left\{ax + \sqrt{bx^2 - c}\right\}$$

   est physiquement acceptable.

   *Aide : on étudiera le sens de variation des fonctions suivantes :*

$$f_+(x) = ax + \sqrt{bx^2 - c}$$

$$f_-(x) = ax - \sqrt{bx^2 - c}$$

   *On précisera le domaine de définition, en fonction de $b$ et $c$, sur lequel $x$ est physiquement acceptable.*

8. Montrer alors que :

$$\Omega\left(\frac{3\eta}{(1+15\eta^2)(1+3\eta^2)}\right)^{1/2} \leq \dot{\theta}_c \leq \Omega\left(\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\right)^{1/2}$$

   En faisant quelques expériences, on remarque que la valeur de $\eta$ n'excède pas $5\%$ . En considérant que $\eta \ll 1$ on montera que :

$$\Omega\sqrt{3\eta} \leq \dot{\theta}_c \leq \Omega\sqrt{6\eta}$$

# 3 Seconde phase de la chute

Dans cette partie on suppose que la tige n'est plus en contact avec la table. Elle est donc en chute libre.

1. Montrer qu'au cours de sa chute $\dot{\theta}$ est constante.
2. On estime le temps de chute $T$ par l'expression suivante :

   $$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

   où $h$ est la hauteur de la table. Discuter qualitativement mais précisemment, des approximations effectuées lors de cette estimation.
3. En déduire un encadrement de l'angle total $\theta_{tot}$ dont la tartine a tourné, entre l'instant initial où elle était horizontale posée sur le rebord de la table et l'instant ou elle touche le sol. On donnera $\theta_{tot}$ en fonction de $\eta$, $l$ et $h$.
4. Application numérique : $\eta = 5\%$, $h = 1$ m, $l = 15$ cm